

20/03/17

Θεώρημα Cayley-Hamilton.

$A \in F^{v \times v}$, $p(x) \in F[x]$ έστω $p(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_s x^s$

Υποθέτουμε $p(A) = b_0 I_v + b_1 A + b_2 A^2 + \dots + b_s A^s \in F^{v \times v}$

Θεώρημα:
(Cayley-Hamilton)

Έστω F σώμα, $A \in F^{v \times v}$, $\chi_A(x) \in F[x]$ το χαρακτηριστικό πολύνομο
τότε $\chi_A(x) = \mathbb{0}_{v \times v}$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 4-x \end{vmatrix} = x^2 - 5x - 2$$

$$A^2 - 5A - 2I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbb{0}_{2 \times 2}$$

Ερώτηση:

(Γίχνει $\forall v \geq 2$). Έστω $A \in F^{v \times v}$ ^{αντικείμενο}, όπου $v=4$ με χαρακτηριστικό πολύνομο $p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + x^4$.

Έχουμε $b_0 \neq 0_F$, γιατί αν $b_0 = 0_F \Leftrightarrow 0$ ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow$
Από Θ. Cayley-Hamilton $p(A) = \mathbb{0}_{v \times v} = b_0 I_4 + b_1 A + \dots + A^4 = \mathbb{0}$
 $\Rightarrow A(b_1 I_4 + b_2 A + b_3 A^2 + A^3) = (-b_0) I_4 \Rightarrow$
 $A(-b_1 b_0^{-1} I_4 - b_2 b_0^{-1} A - b_3 b_0^{-1} A^2 - b_0^{-1} A^3) = I_4$

Αρα $A^{-1} = \dots$

Επίσης στην ερώτηση (*) $A^4 = -b_0 I_4 - b_1 A - b_2 A^2 - b_3 A^3$

Αρα $A^5 = A A^4 = -b_0 A - b_1 A^2 - b_2 A^3 - b_3 A^4$

$\stackrel{(*)}{=} c_0 I_4 + c_1 A + c_2 A^2 + c_3 A^3$ για κάποιο $c_i \in F$

Αρα κάθε δύναμη A^n με $n \geq 4$ γράφεται σαν γραμ. συν των

I_4, A, A^2, A^3 .

Συμπέρασμα: Αν $A \in F^{n \times n}$ (όχι αναγκαστικά αντιστρέψιμος)

και $k \geq n$. Τότε υπάρχουν $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in F$ ώστε

$$A^k = c_0 I_n + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_{n-1} A^{n-1}$$

Άρα ο γραμμικός υπόχωρος V του $F^{n \times n}$ που παράγεται από το σύνολο $\{A^k, k \geq 0\}$ παράγεται επίσης από το σύνολο $\{I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$ άρα έχει διάσταση $\leq n$.

Θα δούμε ότι $\dim V =$ βαθμός του ελαχίστου πολ/μου του A .

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΟΛΥΝΟΜΟ

Πρόταση: Έστω $A \in F^{n \times n}$. Τότε υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο $m_A(x) \in F[x]$:

- i.) $m_A(A) = 0_{n \times n}$.
- ii.) $m_A(x)$ μονικό
- iii.) Αν το $p(x) \neq 0 \in F[x]$ μηδενίζει τον A τότε το $p(x)$ διαιρεί το $m_A(x)$ στο $F[x]$ άρα $\deg m_A(x) \leq \deg p(x)$.

Απόδειξη: Έστω $B = \{q(x) \in F[x] \mid q(x) \neq 0 \text{ και } q(A) = 0_{n \times n}\}$

$B \neq \emptyset$ γιατί $\chi_A(x) \in F[x]$ από το Θ. Cayley-Hamilton. Επιλέγουμε $q(x) \in B$ ελαχίστου βαθμού. Αν c ο μέγιστος βαθμός των $q(x)$ του B , έχουμε $c \neq 0$ και θέτουμε $m_A(x) = c^{-1} q(x)$.

Παράρ. 1: Το $m_A(x)$ ικανοποιεί το i), ii), iii.)

Απόδ.: i) όφειτο γιατί $q(A) = 0$ αφού $q(x) \in B$

ii) Πανερά $m_A(x)$ μονικό

iii) Έστω $p(x) \neq 0$ στο $F[x]$ με $p(A) = 0_{n \times n}$

Από διαίρεση πολυωνύμου υπάρχουν $\pi(x)$ και $r(x) \in F[x]$ $r(x) \neq 0$ και με $(**) p(x) = \pi(x) m_A(x) + r(x)$ και $r(x) = 0$ ή $\deg r(x) < \deg m_A(x)$
Η $(**) \rightarrow r(A) = 0_{n \times n}$, $r(x) \neq 0$

Ορίζεται το $m_A(x) \in F[x]$ της προηγούμενης πρότασης λέγεται ελαχίςτο πολ/μο του A .

Πρόταση:
(χωρίς απόδ.)

Έστω $A \in F^{n \times n}$ με ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x) \in F[x]$. Τ.Α.Ε.Ι.

- i.) ο A είναι διαγωνιστός
- ii.) υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in F$ με $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$ ώστε
$$m_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_s)$$

Με άλλα λόγια ο A είναι διαγωνιστός αν κ' μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβαθμίων.

Παράδειγμα:

Αν $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ και $m_A(x) = (x-1)^2(x-2)$ τότε A ΟΧΙ διαγωνιστός ^{επί του $\mathbb{R}$}
Αν $m_A(x) = x^2 + 1$ ΟΧΙ διαγωνιστός επί του $\mathbb{R}$
Αν $m_A(x) = (x-3)(x-4)$ διαγωνιστός επί του $\mathbb{R}$.

Ερώτηση:

Πως υπολογίζεται το $m_A(x)$;
Από αυτά που είπαμε έστω $A \in F^{n \times n}$, $p(x) \in F[x]$
μονικό με $p(A) = 0_{n \times n}$. Τότε αν το $p(x)$ έχει ελάχιστο
βαθμό ως προς τις δύο αυτές ιδιότητες, έχουμε $p(x) = m_A(x)$.

Παρατήρηση:

Αν $A \in F^{n \times n}$, $1 \leq \deg m_A(x) \leq n$

Παράδειγμα:

Έστω $\lambda \in F$ και $A = \pi_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

Τότε $m_A(x) = x - \lambda$.

Πράγματι, $x - \lambda$ μονικό, μηδενίζει τον A και έχει ελάχιστο
βαθμό ως προς αυτές τις δύο ιδιότητες

Πρόταση:

Έστω ο $A \in F^{n \times n}$ με χαρακτηριστικό πολ/μο $\chi_A(x) \in F[x]$ και
ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$. Τότε

- i.) Το $m_A(x)$ διαιρεί το $\chi_A(x)$ στο $F[x]$
- ii.) Κάθε ανάγωγος παράγοντας του $\chi_A(x)$ εμφανίζεται
στο $m_A(x)$.
- iii.) Εάν πόρισμα του ii.) αν λ ιδιοτιμή του A το $(x - \lambda)$
διαιρεί το $m_A(x)$ στο $F[x]$.

Παράδειγμα: Έστω $A \in \mathbb{F}^{4 \times 4}$ με $\chi_A(x) = (x-1)^4$. Ποια είναι τα πιθανά $m_A(x)$;

→ $m_A(x) = (x-1)$ ή $(x-1)^2$ ή $(x-1)^3$ ή $(x-1)^4$.

Πως βρίσκουμε ποιο από τα 4 είναι;

→ Δοκιμάζουμε το $(x-1)$. Αν μηδενίζεται τότε $m_A(x) = x-1$

Αλλιώς -- το $(x-1)^2$. -- $m_A(x) = (x-1)^2$

-- το $(x-1)^3$ -- $m_A(x) = (x-1)^3$

-- το $(x-1)^4$ -- $m_A(x) = (x-1)^4$

Ο A είναι διαγωνίσιμος μόνο στην πρώτη περίπτωση.

Παράδειγμα: $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ με $\chi_A(x) = (x^2+1)(x-1)^2(x+5)^2$

Ποια είναι τα πιθανά $m_A(x)$;

→ Απαιτείται ο συνδυασμός παραγόντων του $\chi_A(x)$ είναι και του $m_A(x)$ έχουμε: $m_A(x) = (x^2+1)(x-1)(x+5)$

$$m_A(x) = (x^2+1)(x-1)^2(x+5)$$

$$m_A(x) = (x^2+1)(x-1)(x+5)^2$$

$$m_A(x) = (x^2+1)(x-1)^2(x+5)^2$$

Ποιο από τα 4;

→ Πρώτα ελέγχουμε αν το $(x^2+1)(x-1)(x+5)$ μηδενίζει τον A .

Αν ναι τότε είναι το ελάχιστο. Αν όχι ελέγχουμε αν το

$(x^2+1)(x-1)^2(x+5)$ μηδενίζει τον A . Αν ναι είναι το ελάχιστο.

Αν όχι ελέγχουμε αν το $(x^2+1)(x-1)(x+5)^2$ μηδενίζει τον A

Αν ναι είναι ελάχιστο. Αν όχι το ελάχιστο είναι το

$$(x^2+1)(x-1)^2(x+5)^2.$$

Σε ποια περίπτωση είναι ο A διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$;

→ Σε καμία περίπτωση. Γιατί και στις 4 το $m_A(x)$ δεν είναι καν γινόμενο πρωτοβαθμίων.

Παράδειγμα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με $m_A(x) = (x-1)^2(x+1)$.

Είναι ο A διαγωνίσιμος;

→ Όχι γιατί $m_A(x)$ όχι γινόμενο διακεκομμένων πρώτων βαθμίων.
Παρα είναι τα πιθανά $\chi_A(x)$;

→ Το $m_A(x) = (x-1)^3(x+1)$ (π.χ) αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

ή $m_A(x) = (x-1)^2(x+1)^2$ (π.χ) αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$